TD 09 – Méthode probabiliste (corrigé)

Exercice 1. *Théorème de Mycielski*

Recall that the *chromatic number* $\chi(G)$ is the smallest number of colors needed to color the vertices of G such that any two adjacent vertices have different colors. Clearly, graphs with large cliques have a high chromatic number, but the opposite is not true. The goal of this exercise is th prove Mycielski's theorem, which states that for any integer $k \geq 2$, there exists a graph G such that G contains no triangles and $\chi(G) \geq k$.

1. Fix $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ and let G be a random graph on n vertices where each edge appears independently with probability $p = n^{\varepsilon - 1}$. Show that when n tends to infinity, the probability that G has more than $n/2$ triangles tends to 0.

   ☞ The expected number of triangles is less than n^3p^3. By Markov, G has more than $n/2$ triangles with a probability $< \frac{n^3p^3}{n/2} \to 0$.

2. Let $\alpha(G)$ be the size of the largest *independent set* of G (A set of vertices X is *independent* if there is no edge between any two vertices of X in G). Show that $\chi(G) \geq n/\alpha(G)$.

   ☞ By definition of χ, there is a coloring of G with χ colors, which is also a partition of $V(G)$ into subsets such that each subset is independent. Hence, the carnality of each subset is at most α. This implies $\chi\alpha \geq n$.

3. Let $a = 3n^{1-\varepsilon} \ln n$. Show that when n tends to infinity,
$$\mathbb{P}(\alpha(G) < a) \to 1.$$
   Deduce that there exists n and G of size n such that G has at most $n/2$ triangles and $\alpha(G) < a$.

   ☞ α exceeds a with proba at most
$$\binom{n}{a}(1-p)^{\binom{2}{a}} < n^a e^{-p\frac{1}{2}a(a-1)} < n^a n^{-\frac{3}{2}(a-1)} \to 0.$$

4. Let G be such a graph. Let G' be a graph obtained from G by removing a minimum number of of vertices so that G' does not contain any triangle. Show that
$$\chi(G') > \frac{n^{\varepsilon}}{6 \ln n}$$
   and conclude the proof of Mycielski's Theorem.

   ☞
$$\chi > |G'|/\alpha > \frac{n/2}{3n^{1-\varepsilon}\ln n} > \frac{n^{\varepsilon}}{6\ln n}$$

Exercice 2. *Test*

Deux cent étudiants participent à un concours de maths. Le concours comporte 6 questions. Pour chaque question, au moins 120 étudiants ont réussi à répondre correctement à la question. Montrer qu'il existe deux étudiants qui avaient tout bon à eux deux (i.e. tels que pour chaque question, au moins un des étudiants a bien répondu).

☞ C'est le problème 1 de `https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf`. On considère une distribution uniforme que les couples d'étudiants avec remise. On note u et v deux entiers entre 1 et 200 tirés uniformément au hasard (et indépendamment). Et on note $u[i] = 1$, pour $1 \leq i \leq 6$ si l'étudiant u a bien répondu à la question i, et $u[i] = 0$ sinon. On sait que pour tout i, $\mathbf{P}\{u[i] = 0\} \leq \frac{80}{200} = \frac{2}{5}$, où la probabilité est prise sur le choix de u. Comme u et v sont indépendants, on a $\mathbf{P}\{u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{4}{25}$. D'où, par borne de l'union, $\mathbf{P}\{\exists i \text{ t.q. } u[i] = 0 \text{ et } v[i] = 0\} \leq \frac{24}{25} < 1$. Donc il existe un choix de u et v (i.e. deux étudiants) tels que pour toute question, $u[i] = 1$ ou $v[i] = 1$.

Exercice 3. *Intervalle*

Soit S une union d'intervalles inclus dans le segment $[0,1]$. On suppose que la longueur totale de S est strictement supérieure à $1/2$. Montrer qu'il existe deux points $x, y \in S$ tels que $|x-y| = 0.1$.
☞

C'est le problème 10 de `https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf`. On tire x uniformément au hasard dans $[0,1]$ et on définit $y = x + 0.1$ si $\lfloor 10x \rfloor$ est pair, et $y = x - 0.1$ sinon (faire un dessin). Alors, y est uniformément distribué dans $[0,1]$ (mais pas indépendant de x). Et on a $|x-y| = 0.1$. Par borne de l'union, $\mathbf{P}\{x \notin S \text{ ou } y \notin S\} \leq 2(1-p)$, où p est la longueur totale de S. Par hypothèse, $1-p < 1/2$, donc cette probabilité est strictement inférieure à 1. On en déduit qu'il existe x et y dans S à distance 0.1.

Exercice 4. *Polynome*

Soit $P = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2, avec $a, b \in \mathbb{C}$. Supposons que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, on ait $|P(z)| = 1$. Montrer que $a = b = 0$. *Indice : on pourra considérer* $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right]$*, où Z est choisi uniformément sur le cercle unité.*
☞

C'est le problème 26 de `https://pdfs.semanticscholar.org/a5bd/73c6b3ded7a4eb9f851f4aa0721d59ffb07a.pdf`. On applique l'indice. On défini Z une variable aléatoire uniforme sur le cercle unité complexe. On a $|P(Z)|^2 = (Z^2 + aZ + b)\overline{(Z^2 + aZ + b)} = 1 + |a| + |b| + 2\mathrm{Re}(\bar{a}Z) + 2\mathrm{Re}(\bar{b}Z^2) + 2\mathrm{Re}(a\bar{b}Z)$ (où on a utilisé le fait que $|Z| = 1$). Mais l'espérance de chacune des parties réelles est nulle (c'est une variable centrée en zéro quand Z parcourt le cercle unité, on peut aussi le voir en écrivant la définition de l'espérance et des parties réelles avec les sinus). D'où $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1 + |a| + [b|$. Mais comme $|P(z)| = 1$ pour tout z (par hypothèse), on sait aussi que $\mathbf{E}\left[|P(Z)|^2\right] = 1$. D'où $a = b = 0$.

Exercice 5. *Lemme local de Lovasz*

Soit $k > 6$. On se donne une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles d'un ensemble fini F telle que

1. Pour tout $i \in I$, $\mathrm{card}(A_i) = k$,
2. Pour tout $x \in F$, $\mathrm{card}\{i \in I : x \in A_i\} \leq \frac{2^k}{8k}$

En utilisant le lemme local de Lovász, montrer qu'il existe une partition $F = F_1 \cup F_2$ telle que

$$\forall i \in I, \quad A_i \cap F_1 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A_i \cap F_2 \neq \emptyset.$$

☞

On partitionne F au hasard en décidant indépendamment et uniformément si chaque $x \in F$ est dans F_1 ou F_2. Pour tout $i \in I$, soit E_i l'événement $\{A_i \cap F_1 = \emptyset\} \cup \{A_i \cap F_1 = \emptyset\}$. Les hypothèses impliquent que chaque événement E_i est indépendant de tous les autres E_j sauf au plus $2^k/8$ d'entre eux ; autrement dit le graphe d'indépendance sous-jacent a degré $\leq 2^k/8 =: d$. Par ailleurs, $\mathbf{P}\{E_i\} \leq 2 \cdot 2^{-k} =: p$. Comme $4dp = 1$, on peut conclure par le lemme local de Lovász.

Exercice 6. *LargeCut*

Given an undirected graph G with n vertices and m edges. Prove that there is a partition of V into two disjoint sets A and B such that at least $m/2$ edges connect a vertex in A to a vertex in B.
☞ [MU] Th. 6.3. Construct a random partition (A, B) of vertices, i.e. assign each vertex either to A or to B independently at random (you assign each vertex to A or B by flipping a fair coin). For edge e_i, define X_i being an indicator rv. for e_j to connect A with B. The probability that e_i connects A with B is $1/2$, hence $\mathbf{E}[X_i] = 1/2$. Let $C(A, B)$ be a rv. denoting the value of the cut (i.e. the number of edges between A and B). It's expected value then,

$$\mathbf{E}[C(A,b)] = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{E}[X_i] = m/2.$$

Using the fact that if $\mathbf{E}[X] = \mu$, then $\mathbf{P}\{X \geq \mu\} > 0$ and $\mathbf{P}\{X \leq \mu\} > 0$, there must be a least one cut that contains at least $m/2$ edges.