TD 04 – Moments et Inégalités de concentration

Exercice 1. *Running Time*

Soit $\mathcal{A}$ un algorithme déterministe qui prend en entrée une chaîne de n bits et dont l'espérance du temps d'exécution est $\mathcal{O}(n^2)$ si l'entrée est choisie aléatoirement de manière uniforme.

1. Soit $f(n)$ une fonction tendant vers $+\infty$ avec n. Montrer que la probabilité que le temps d'exécution soit supérieur à $n^2 f(n)$ tend vers zero quand n tend vers l'infini.
2. Que pouvons nous en déduire sur le temps d'exécution dans le pire cas ?

Exercice 2. *Coquilles dans un TD*

1. Une feuille de TD contient 4 coquilles. À chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité $1/3$. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire au minimum pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune coquille soit supérieure à 0,9 ?
2. À quel autre problème vu en cours vous fait penser la situation précédente ?
3. Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Montrer que pour tout $n \geq 50$, la probabilité que de l'événement $\{10 - n < X < 10 + n\}$ est au moins égale à 0,99.

Exercice 3. *Chebychev d'ordre supérieur*

L'inégalité de Chebyshev utilise la variance d'une variable aléatoire pour borner son écart par rapport à l'espérance. On peut également utiliser des moments d'ordre supérieur.

1. Supposons que l'on ait une variable aléatoire X et un entier pair k pour lequel $\mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^k\right]$ est finie. Prouver que :
$$\mathbf{P}\left\{|X - \mathbf{E}[X]| > t\sqrt[k]{\mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^k\right]}\right\} \leq \frac{1}{t^k} .$$
2. Qu'est-ce qui nous empêche d'obtenir une inégalité similaire pour le cas où k est impair ? Trouver un contre exemple pour $k = 1$.

Exercice 4. *Comparer Markov, Chebyshev, Chernoff bounds*

On a un dé équilibré à 6 côtés. On lance le dé n fois et on note X le nombre de fois où le dé tombe sur 6. Soit q la probabilité de l'événement $X \geq n/4$.

1. Comparer les bornes supérieures que l'on obtient en utilisant l'inégalité de Markov, l'inégalité de Chebyshev, et une borne de Chernoff (la plus adaptée).

Exercice 5. *Fonction Génératrice*

Etant donnée une variable aléatoire discrète X, à valeurs entières, on appelle *fonction génératrice de X* la fonction $G_X(z) := \mathbb{E}(z^X)$.

1. Dîtes des choses intelligentes sur la fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète (ex : donnez la fonction génératrice sous forme de série entière, une formule de l'espérance de X, de sa variance...).

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson : $\mathbb{P}(X = k) = \mathcal{C}(\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}$, avec $\lambda > 0$.

2. Donner une autre expression pour $G_X(z)$.
3. Montrer que $\mathcal{C}(\lambda) = e^{-\lambda}$.

4. Calculer la fonction génératrice de X. En déduire $\mathbf{E}[X]$ et $\mathbf{Var}[X]$.
5. Reprendre la question précédente en supposant que X est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 6. *Tester la pièce*

1. On considère une pièce qui tombe sur pile avec probabilité p. Combien de fois doit-on lancer la pièce pour déterminer p à ± 0.1 avec probabilité au moins 0.9 ?

Exercice 7. *Probabilités conditionnelles*

Soit Y une variable aléatoire prenant des valeurs entières, positives ou nulles, et dont l'espérance est strictement positive. Le but de cet exercice est de prouver la relation suivante :

$$\frac{\mathbf{E}[Y]^2}{\mathbf{E}[Y^2]} \leq \mathbf{P}\{Y \neq 0\} \leq \mathbf{E}[Y] \ .$$

1. On voudrait une variable aléatoire X qui corresponde informellement à $(Y|Y \neq 0)$. Comment la définir proprement (on pourra changer d'espace de probabilité) ?
2. Comparer $\mathbf{E}[X]^2$ et $\mathbf{E}\left[X^2\right]$.
3. Conclure.

Exercice 8. *Chernoff Bound Interval*

Let X be an arbitrary random variable with $0 \leq X \leq 1$ and $\mathbf{E}[X] = p$. Consider the random variable $Y \in \{0, 1\}$ with $\mathbf{P}\{Y = 1\} = p$. Show that for any $\lambda > 0$, $\mathbf{E}\left[e^{\lambda X}\right] \leq \mathbf{E}\left[e^{\lambda Y}\right]$. *Hint : you may want to use the convexity of the exponential function.*
Using this fact, show that the Chernoff bound we saw in class still holds if we replace the condition $X_i \in \{0, 1\}$ by $X_i \in [0, 1]$.