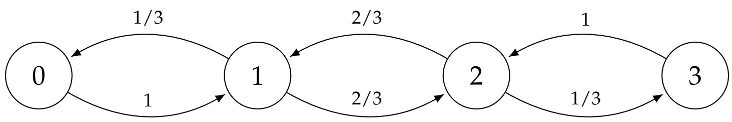
TD 13 – Chaînes de Markov (random walks) (corrigé)

Exercice 1. *Diffusion*

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N, and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t, the exchange is modeled as follows : if the first container has x molecules, then it increases to $x+1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x-1$ with probability $\frac{x}{N}$.

1. Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N = 3$, draw a graphical representation of this Markov chain.

☞



For general N, the entries of the transition matrix are given by $P_{i,i+1} = (N-i)/N$, $P_{i,i-1} = i/N$, $P_{i,i} = 0$.

2. Find the stationary distribution of this Markov chain.

☞ We know, using the flow techniques (look at a cut between i and $i+1$) that the stationary distribution π satisfies, for all $0 \le i \le N$

$$\begin{aligned}
\pi_i \cdot \frac{N-i}{N} &= \pi_{i+1}\frac{i+1}{N} \\
\Leftrightarrow \pi_{i+1} &= \frac{N-i}{i+1}\pi_i \\
&= \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^{i} \frac{N-j}{j+1} \\
&= \binom{N}{i+1}\pi_0
\end{aligned}$$

Hence, for all $0 \le i \le N$, we have $\pi_i = \binom{N}{i+1}\pi_0$. But we also know that $\sum_i \pi_i = 1$, i.e. $\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i+1} = 1$. We conclude that $\pi_0 = 2^{-N}$.

3. Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \ge 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.

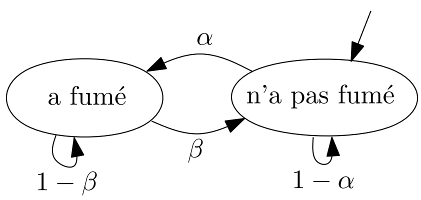
☞ In one of the lectures, we defined the quantity $h_{i,i}$ to be an average time to return to state i from i. In was also shown that $h_{i,i} = \lim_{n\to\infty} P^n_{j,i} = 1/pi_i$. For $i = 0$, $h_0 = 1/pi_0 = 2^n$.

Exercice 2. *Fumeur*

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. Le premier jour suivant cette bonne résolution (jour 0), il ne fume pas. On suppose que la probabilité qu'il fume le jour $j+1$ s'il n'a pas fumé le jour j est α, et que la probabilité qu'il ne fume pas le jour $j+1$ s'il a fumé le jour j est β, avec α et β non nuls et indépendants de j.

1. Justifier que l'on peut modéliser ce problème par une chaîne de Markov, et en donner sa représentation graphique.

☞ On peut modéliser cela par une chaîne de Markov car la probabilité qu'il fume le lendemain dépend seulement du fait qu'il ait fumé ou pas le jour-même. Voici la chaîne de Markov :



2. Calculer la probabilité p_n qu'il ne fume pas le jour n. Quelle est la limite π de $(p_n, 1-p_n)$ quand $n \to +\infty$? Vérifier que π est une probabilité invariante pour la chaîne, c'est-à-dire que si X_n suit la loi π, alors X_{n+1} aussi.

☞ Comment arrive-t-on à ne pas fumer le jour n ? Pour $n = 0$, on a $p_0 = 1$. Ensuite, soit on n'a pas fumé au jour $n-1$, ce qui arrive avec proba p_{n-1}, et on ne fume encore pas, ce qui arrive avec proba $1-\alpha$; soit on a fumé au jour $n-1$, ce qui arrive avec proba $1-p_{n-1}$, puis on ne fume pas ce qui arrive avec proba β. Donc la suite (p_n) suit la relation de récurrence suivante :

$$p_n = p_{n-1}(1-\alpha) + (1-p_{n-1})\beta = (1-\alpha-\beta)p_{n-1} + \beta$$

La suite (p_n) est donc arithmetico-géométrique avec $a = 1-\alpha-\beta$ et $b = \beta$. On pose donc $r = \frac{b}{1-a} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ et on applique la formulée donnée dans le rappel :

$$p_n = a^n(p_0 - r) + r = (1-\alpha-\beta)^n(1-r) + r = (1-\alpha-\beta)^n \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} .$$

Si $1-\alpha-\beta \neq \pm 1$ (i.e. $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$ et $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$), alors $p_n \to \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ quand n tend vers l'infini. Si à l'inverse $(\alpha,\beta) = (1,1)$ (le cas $(0,0)$ est impossible par hypothèse), alors la chaine est périodique de période 2, et on ne peut pas converger vers une distribution stationnaire.

On vérifie que si $\mathbf{P}\{X_n = \text{pas fumé}\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ alors $\mathbf{P}\{X_n + 1 = \text{pas fumé}\} = (1-\alpha)\mathbf{P}\{X_n = \text{pas fumé}\} + \beta\mathbf{P}\{X_n = \text{a fumé}\} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

3. Trouver $s > 0$ et $0 < t < 1$ tels que , pour tout état x on a : $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| \leq st^n$.

☞ Pour $x = $ a fumé, $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| = |p_n - r| = |a^n(1-r) + r - r| = a^n(1-r)$. De plus, pour $x = $ pas fumé, $|\mathbf{P}\{X_n = x\} - \pi(x)| = |(1-p_n) - (1-r)| = |-a^n(1-r) - r + r| = a^n(1-r)$ donc on prend $s = 1-r$ et $t = a$.

4. Quelle est la loi du premier jour où il se remet à fumer ?

☞ Soit X le premier jour où il se remet à fumer. On a $X = n$ ssi il reste dans l'état "pas fumé" pendant $n-1$ jours puis prend la transition de probabilité α au n-ième jour. Donc $\mathbf{P}\{X = n\} = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$. Il s'agit donc d'une loi géométrique de paramètre α.

5. Quelle est la loi du premier jour (autre que le jour 0) où il ne fume pas ?

☞ Soit X le premier jour autre que le jour 0 où il ne fume pas. On a $X = n$ ssi au jour 1, il passe dans l'état "a fumé", qu'il y reste pendant $n-2$ jours, et enfin il prend la transition vers "pas fumé". Donc

$$\mathbf{P}\{X = n\} = \alpha(1-\beta)^{n-2}\beta$$

.

6. Calculer l'espérance du nombre de jours N_n où il fume entre le jour 1 et le jour n. Déterminer la limite $\mathbf{E}[N_n]/n$.

☞ Soit W_i la variable aléatoire qui vaut 1 s'il ne fume **pas** au jour i, et 0 sinon. Alors $\mathbf{P}\{W_i = 1\} = p_i$ et $N_n = n - \sum_{i=1}^n W_i$. Donc $\mathbf{E}[N_n] = n - \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[W_i] = n - \sum_{i=1}^n p_i$.
Or, par la formule donnée, $\sum_{i=1}^n p_i = (p_0 - r)\frac{a-a^n}{1-a} + nr$ donc

$$\mathbf{E}[N_n] = n - ((1-r)\frac{a-a^n}{1-a} + nr) = n(1-r) - (1-r)\frac{a-a^n}{1-a}.$$

et donc

$$\frac{\mathbf{E}[N_n]}{n} = (1-r) - \frac{1}{n}(1-r)\frac{a-a^n}{1-a} \longrightarrow_{n\to\infty} 1-r = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

Exercice 3. *Cover time in graphs*

Given a finite, undirected non-bipartite and connected graph $G = (V, E)$, recall that the *cover time* of G is the maximum over all vertices $v \in V$ of the expected time to visit all of the nodes in the graph by a random walk starting from v.

1. Recall that $h_{v,u}$ is the expected number of steps to reach u from v and $h_{u,u} = \frac{2|E|}{d(u)}$. Show that

$$\sum_{w \in N(u)} (1 + h_{w,u}) = 2|E|.$$

☞ Let $N(u)$ be the set of neighbors of vertex u in G. We compute $h_{u,u}$ in two different ways :

$$h_{u,u} = \frac{2|E|}{d(u)}$$

and

$$h_{u,u} = \frac{1}{d(u)} \sum_{w \in N(u)} (1 + h_{w,u}).$$

Hence

$$2|E| = \sum_{w \in N(u)} (1 + h_{w,u}).$$

2. Let T be a *spanning tree* of G (i.e. T is a tree with vertex set V). Show that there is a *tour* (i.e. a walk with the same starting and ending points) passing each edge of T exactly twice, once for each direction.

☞ Following Depth-first Search.

3. Let $v_0, v_1, ..., v_{2|V|-2} = v_0$ be the sequence of vertices of such tour. Prove that

$$\sum_{i=0}^{2|V|-3} h_{v_i, v_{i+1}} < 4|V| \times |E|.$$

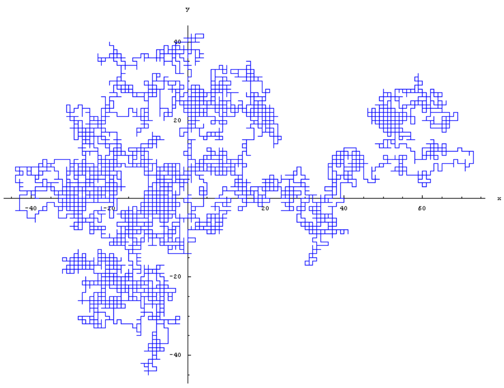
☞ From Q1, we have $h_{v,u} < 2|E|$ for any edge uv. The result trivially follows.

4. Conclude that the cover time of G is upper-bounded by $4|V| \times |E|$.

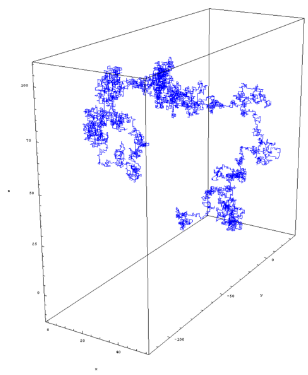
☞ $\sum_{i=0}^{2|V|-3} h_{v_i, v_{i+1}}$ is the expected time to go through the tour, i.e the expected time for any vertex v_i visit all nodes in the graph in a strict order. Hence it is longer than the expected time for any vertex v_i to visit all nodes in the graph without such order restriction, i.e. the cover time of G is at most $\sum_{i=0}^{2|V|-3} h_{v_i, v_{i+1}} < 4|V| \times |E|$.

Exercice 4. *Random walks on $\mathbb{Z}^d$*

Consider the simple random walk over $\mathcal{Z}^d$ with probability $1/2d$ to jump towards any of the $2d$ neighbors in the grid. The walk is clearly irreducible.



A random walk in $\mathcal{Z}^2$
(10000 steps, Wikipedia)



A random walk in $\mathcal{Z}^3$
(10000 steps, Wikipedia)

1. For $d = 1$, whether it is recurrent ? positive recurrent ?

☞ [Déjà fait dans les TDs précédents]

Soit $(X_n)_n$ la chaîne de Markov associée à la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. La chaîne est irréductible, il suffit de montrer que 0 est récurrent. On va utiliser la caractérisation suivante : x est récurrent ssi $\sum_n P^n(x, x) = \infty$.
La chaîne est de période 2 donc $P^{2n+1}(0, 0) = 0$.

$$P^{2n}(0,0) = \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \tag{1}$$

(on choisit n étapes vers la droite parmi $2n$, les n restantes sont forcément vers la gauche).
La formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ donne

$$P^{2n}(0,0) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \tag{2}$$

La série $\sum_n P^{2n}(0, 0)$ diverge.
Pour montrer que la chaine de Markov est récurrente nulle, on peut par exemple faire la méthode des coupes (on aurait alors $\pi(n)\frac{1}{2} = \pi(n+1)\frac{1}{2}$ soit π constante, ce qui en sommant sum les n donne $\pi = 0$)

2. For $d = 2$, whether it is recurrent ? positive recurrent ?
Hint : Consider decomposing the walk into two independent walks.

☞

Cas d=2

L'idée est de projeter sur les première et seconde bissectrices de pente ± 1. On change donc de coordonnées. On suppose qu'on était dans la base orthonormée $\mathbb{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et on fixe deux nouveaux vecteurs :

— $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}\right)$

— $\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{j} - \overrightarrow{i}\right)$

Et on appelle $\mathbb{B}' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Aussi un point de coordonnées (x, y) dans la base $\mathbb{B}$ a des coordonnées $(i+j, j-i)$ dans la base $\mathbb{B}'$.

Les 4 mouvements possibles deviennent donc :

— $(+1, 0) \to (+1, -1)$

— $(-1, 0) \to (-1, +1)$

— $(0, +1) \to (+1, +1)$

— $(0, -1) \to (-1, -1)$

On obtient donc un produit cartésien de deux variables aléatoires indépendantes. On a donc deux marches aléatoires sur $\mathcal{Z}$ indépendantes. C'est donc une marche aléatoire récurrente.

3. In the case $d = 3$, for every n, show that

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \sum_{r+s+t=n} \binom{2n}{n} \binom{n}{r, s, t}^2 \frac{1}{6^{2n}},$$

where S_i is the location of the walk at time i.

☞

Cas d=3

Le nombre d'étape pour revenir à l'origine est $2n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas de $\mathcal{Z}^3$, de tels chemins doivent aller r fois vers le haut, r fois vers le bas, t fois à gauche, t fois à droite, s fois devant et s fois vers l'arrière et tel que $r + s + t = n$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{r+s+t=n} \frac{(2n)!}{(r!s!t!)^2} \frac{1}{6^{2n}} \\
&= \sum_{r,s,t} \frac{(2n)!}{(r!s!t!)^2} \frac{(n!)^2}{(n!)^2} \frac{1}{6^{2n}} \\
&= \binom{2n}{n} \sum_{r,s,t} \frac{(n!)^2}{(r!s!t!)^2} \frac{1}{6^{2n}}
\end{aligned}$$

4. Show that

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) < \infty$$

and conclude for the case $d = 3$.

☞

On peut remarquer que pour $n = 3m$, on a

$$\binom{3m}{r, s, t} \leq \binom{3m}{m, m, m} \tag{3}$$

Il suit

$$\begin{aligned}
P^{6m}(0,0) &\leq \binom{2n}{n} \binom{3m}{m, m, m} \frac{1}{3^n} \frac{1}{2^{2n}} \sum_{r+s+t=n} \binom{3m}{r, s, t} \frac{1}{3^n} && (4) \\
&= \binom{2n}{n} \binom{3m}{m, m, m} \frac{1}{3^n} \frac{1}{2^{2n}} \underbrace{\sum_{r+s+t=n} \binom{3m}{r, s, t} \frac{1}{3^r} \frac{1}{3^s} \frac{1}{3^t}}_{=(1/3+1/3+1/3)^n = 1} && (5) \\
&= \binom{2n}{n} \binom{3m}{m, m, m} \frac{1}{3^n} \frac{1}{2^{2n}} && (6) \\
&\sim \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\pi n}\right)^{3/2} && (7)
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$P^{6m}(0,0) = \frac{1}{6}^2 \frac{1}{6}^{6m-2} \sum_{i,j,k=6m} \ldots \geq \frac{1}{6}^2 P^{6m-2}(0,0) \tag{8}$$

Comparaison similaire pour $P^{6m-4}(0,0)$

On conclut par

$$\sum_n P^{2n}(0,0) = \sum_m \sum_{k=0,1,2} P^{6m-2k}(0,0) \leq \sum_m C P^{6m}(0,0) < \infty \tag{9}$$

Exercice 5. *Cat and mouse*

A cat and mouse each independently take a random walk on a connected, undirected, non-bipartite graph G. They start at the same time on different nodes, and each makes one transition at each time step. The cat eats the mouse if they are ever at the same node at some time step. Let n and m denote, respectively, the number of vertices and edges of G.

1. Show an upper bound of $\mathcal{O}(m^2 n)$ on the expected time before the cat eats the mouse. (Hint : Consider a Markov chain whose states are the ordered pairs (a, b), where a is the position of the cat and b is the position of the mouse.)

   ☞ Following the hint, we formulate a new Markov chain with n^2 states of the form $(i, j) \in [1, n]^2$. Each node (i, j) in the new chain is connected to $N(i)N(j)$ neighbors, where $N(i)$ denotes the number of neighbors of state i in the old Markov chain. Hence, the number of edges in the new chain comes to

$$2|E| = \sum_i \sum_j N((i,j)) = \sum_i \sum_j N(i)N(j) = \Big(\sum_i N(i)\Big)\Big(\sum_j N(j)\Big) = 4m^2$$

   By Lemma 15 (If $(u, v) \in E$, then $h_{v,u} < 2|E|$), if edge exists between nodes $u = (i_1, j_1)$ and $v = (i_2, j_2)$, then $h_{u,v} \leq 2|E| = 4m^2$.
   In order to obtain the $\mathcal{O}(m^2 n)$ upper bound, we need to show that for any node (i, j), there exists a path of length $\mathcal{O}(m^2 n)$ connecting it to some node of the form (v, v). In fact, we show that there exists a length $\mathcal{O}(n)$ path between (i, j) and (i, i). Since the graph is undirected, the cat can always go back to node i in two steps. At the same time, because the graph is connected, there exists a path of length $k < n$ from j to i. If k is even, then the mouse will run into the cat. If k is odd, then the mouse will get to node i when the cat is away. But since the chain is non-bipartite, there must be a path of odd length from i back to itself ; let the mouse follow this path, and it will run into the cat on the next return to i. Thus the total length of this path from (i, j) to (i, i) is at most $3n$. Each edge on this path requires at most $4m^2$ steps, thus the desired upper bound on the time to collision is $\mathcal{O}(m^2 n)$ steps.