

TD 12 – Chaînes de Markov (distributions invariantes) (corrigé)

Exercice 1.

Proposition utiles

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

- Redémontrez la propriété suivante vue en cours : si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j , alors j est aussi de période d . Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

☞ Si i et j communiquent, alors il existe deux entiers n et m tels que $p_{ij}^{(n)} > 0$ et $p_{ji}^{(m)} > 0$. Comme i est de période $d(i) = d$, il existe un entier s multiple de d tel que $p_{ii}^{(s)} > 0$. On a donc $p_{ij}^{(m+s+n)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(n)} > 0$. Comme $p_{ii}^{(s)} > 0$ entraîne que $p_{ii}^{(2s)} > 0$, on a aussi que $p_{ij}^{(m+2s+n)} > 0$. La période de j divise donc à la fois $m+s+n$ et $m+2s+n$, donc aussi leur différence s . En particulier, elle divise la période $d(i)$ de i . De même on montre que $d(i)$ divise $d(j)$, et donc que $d(i) = d(j)$.

Un état qui possède une boucle sur lui-même est forcément apériodique car il existe un chemin de lui-même à lui-même de longueur 1.

- Redémontrez la propriété vue en cours : la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.

☞ Comme i et j communiquent, on a $p_{ij}^{(n_1)} > 0$ et $p_{ji}^{(n_2)} > 0$ pour certains entiers n_1 et n_2 . On en déduit :

$$\sum_n p_{ij}^{(n_1+n+n_2)} \geq \sum_n p_{ji}^{(n_2)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(n_1)} = p_{ji}^{(n_2)} p_{ij}^{(n_1)} \sum_n p_{ii}^{(n)} = +\infty.$$

- On regroupe les états d'une chaîne de Markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i . Une classe \mathcal{C} d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, $p_{ij} = 0$ (où $(p_{ij})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrez que :

- Une classe non close est transitoire.
- Une classe close **finie** est récurrente.

En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

☞ Soit \mathcal{C} une classe non-close : il existe donc $i \in \mathcal{C}$ et $j \notin \mathcal{C}$ tels que $p_{ij} \neq 0$. Or i et j ne communiquent pas car ils ne sont pas dans les mêmes classes, donc i n'est pas accessible depuis j . Donc pour tout n , $\mathbf{P}\{X_n = i | X_1 = j\} = 0$ (où X_n décrit le n -ième état dans une marche sur la chaîne de Markov). Soit T_i le temps d'atteinte de i , alors on déduit de ce qui précède que $\mathbf{P}\{T_i < \infty | X_1 = j\} = 0$. Finalement, $\mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i\} \geq \mathbf{P}\{T_i = +\infty | X_0 = i, X_1 = j\} \mathbf{P}\{X_1 = j | X_0 = i\} = 1 \cdot p_{ij} > 0$. Cela prouve que i est transitoire, et donc que \mathcal{C} l'est.

On considère maintenant une classe \mathcal{C} close finie. On va procéder par l'absurde et supposer que toutes les états de \mathcal{C} sont transitoires. Soit $i \in \mathcal{C}$. Partant de i , la chaîne reste dans \mathcal{C} . On note N_j le nombre de passages en l'état j . Alors

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{j \in \mathcal{C}} N_j = \infty | X_0 = i\right\} = 1.$$

Cette somme est en fait finie, donc on en déduit que $\mathbf{P}\{\exists j \in \mathcal{C}, N_j = \infty | X_0 = i\} = 1$. Or on a supposé que tout $j \in \mathcal{C}$ est transitoire donc $\mathbf{P}\{N_j = \infty | X_0 = i\} = 0$. On aboutit donc à une contradiction. Ainsi, toute classe finie close est récurrente.

- Démontrez que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.

[Indice : on pourra montrer d'abord les points suivants

- x est transitoire ssi $\mathbf{E}[N_x | X_0 = y] < \infty$ pour tout état y
- Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \rightarrow 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne)]

☞ Soit π une loi de probabilité stationnaire et i un état transitoire. π vérifie pour tout n , $\pi P^n = \pi$ donc $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}^{(n)}$. Or si i est transitoire, $p_{ji}^{(n)}$ tend vers 0. On peut inverser série et limite par convergence dominée car $|p_{ji}^{(n)}| \leq 1$ et $\sum_j \pi_j = 1$ et on en déduit $\pi_i = 0$.

Exercice 2.

Classification des états

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Pour chacune d'entre elles :

- Donner sa représentation graphique.
- Partitionner les états en composantes irréductibles.
- Pour chaque état, dire s'il est transitoire ou récurrent.
- Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
- Donner la distribution stationnaire.
- Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.



Case A :

- There are two components $\{1,3\}$ and $\{2\}$
- The recurrent states are $\{1,3\}$ since for the state (1), we have $\sum_{i \geq 1} r_{1,i}^t = 2/3 + 1/3 \sum_{i=1}^{\infty} (1/2)^i = 1$, and for the state (3), $\sum_{i \geq 1} r_{3,3}^t = 1/2 + 1/2 \cdot 1/3 \sum_{i=1}^{\infty} (2/3)^i = 1$. The state (2) is transient.
- The chain is aperiodic
- The stationary distribution is $\pi = (3/5, 0, 2/5)$.
- One can compute $h_{i,j}$ either using $h_{i,j} = 1/\pi(j)$, or, for the state (1) and (3) using the definition of $h_{i,j} = \sum_{t \geq 1} t r_{i,j}^t$.

Case B :

- There are two components $\{1,2,3\}$ and $\{4\}$.
- The recurrent state is $\{4\}$. The states $\{1,2,3\}$ are transient.
- State 4 is aperiodic. States 1,2,3 have period 3.
- The stationary distribution is $\pi = (0,0,0,1)$. We have (4) as an absorbing state.
- We have $h_{i,j} = \infty$ for $i \in \{1,2,3\}$ and $h_{4,4} = 1$.

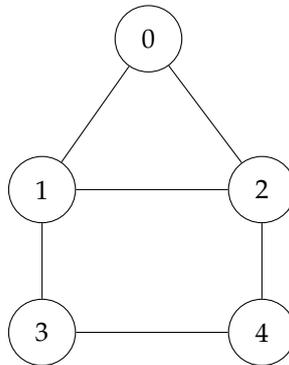
Case C :

- La chaîne est irréductible.
- Tous les états sont récurrents.
- Tous les états sont apériodiques.
- Le distribution stationnaire est $\pi = (2/7, 1/7, 4/7)$ (peut être calculée avec un pivot de Gauss)
- On a $h_{11} = 7/2, h_{22} = 7$ et $h_{33} = 7/4$.

Exercice 3.

Marche aléatoire dans un graphe

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisit le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisins du sommet courant).



1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.



La chaîne de Markov associée à la marche aléatoire sur le graphe est irréductible (le graphe est connexe). Elle est aussi apériodique grâce au triangle formé par les états 0, 1 et 2. En effet, la période de l'état 0 est le pgcd de 2 (un aller retour $0 - 1 - 0$) et 3 (un cycle $0 - 1 - 2 - 0$). Donc l'état 0 est apériodique. Comme la chaîne est irréductible tous les états sont apériodiques. Si on trouve une distribution stationnaire, le théorème de convergence nous assurera une convergence vers cette distribution stationnaire. On observe que la distribution $\pi = (1/6, 1/4, 1/4, 1/6, 1/6)$ est stationnaire (on peut la calculer en résolvant le système d'équations $\pi Q = \pi$ par exemple). Le théorème de convergence nous permet de conclure que $\pi_n \rightarrow \pi$ quand n tend vers l'infini.

2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.



La réponse est la même, le théorème de convergence ne dépend pas de l'état initial.

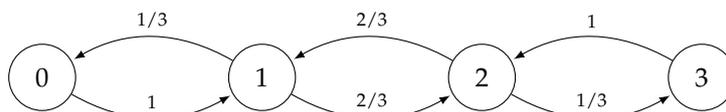
Exercice 4.

Diffusion

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N , and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t , the exchange is modeled as follows : if the first container has x molecules, then it increases to $x + 1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x - 1$ with probability $\frac{x}{N}$.

- Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N = 3$, draw a graphical representation of this Markov chain.

☞



For general N , the entries of the transition matrix are given by $P_{i,i+1} = (N - i)/N$, $P_{i,i-1} = i/N$, $P_{i,i} = 0$.

- Find the stationary distribution of this Markov chain.

☞ We know, using the flow techniques (look at a cut between i and $i + 1$) that the stationary distribution π satisfies, for all $0 \leq i \leq N$

$$\begin{aligned} \pi_i \cdot \frac{N - i}{N} &= \pi_{i+1} \frac{i + 1}{N} \\ \Leftrightarrow \pi_{i+1} &= \frac{N - i}{i + 1} \pi_i \\ &= \pi_0 \cdot \prod_{j=0}^i \frac{N - j}{j + 1} \\ &= \binom{N}{i + 1} \pi_0 \end{aligned}$$

Hence, for all $0 \leq i \leq N$, we have $\pi_i = \binom{N}{i+1} \pi_0$. But we also know that $\sum_i \pi_i = 1$, i.e. $\pi_0 \cdot \sum_{i=0}^N \binom{N}{i+1} = 1$. We conclude that $\pi_0 = 2^{-N}$.

- Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \geq 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.

☞ In one of the lectures, we defined the quantity $h_{i,i}$ to be an average time to return to state i from i . It was also shown that $h_{i,i} = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{j,i}^n = 1/p_{i,i}$. For $i = 0$, $h_0 = 1/p_{0,0} = 2^n$.

Exercice 5.

Triangles monochromatiques

Une k -coloration d'un graphe est un assignement pour chaque sommet d'une couleur parmi k couleurs au total. Elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est k -colorable s'il existe une k -coloration propre. Soit G un graphe 3-colorable.

- Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est monochromatique si les trois sommets qui le composent reçoivent la même couleur).

☞ Il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert. On recolorie les sommets verts en rouge. Chaque triangle contenait déjà un sommet rouge et un sommet bleu avant la recoloration, et c'est toujours le cas.

On considère maintenant l'algorithme suivant dont le but est de trouver une telle 2-coloration : on commence avec une 2-coloration arbitraire. Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur. On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert (mais que l'on ne connaît pas). On note R (resp. B , V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration. Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c , plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c .

- Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?

☞ Dans ces cas, aucun triangle n'est monochromatique et l'on a terminé.

3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \dots, n\}$. Quels sont le ou les sommets à atteindre pour terminer? Que pouvez-vous dire de l'état j par rapport à l'état $n - j$ pour $j \in \{0, \dots, n\}$?

☞ Supposons $m(c) = j \neq 0, n$ et regardons le triangle monochromatique choisi. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il est entièrement rouge. Avec proba $1/3$, on tire le sommet de V et on le recolore : cela laisse $m(c)$ inchangé ; avec proba $1/3$, on tire le sommet de B et on le recolore : on passe à $m(c) + 1$; et enfin avec proba $1/3$, on tire le sommet de R et on le recolore : on passe de $m(c)$ à $m(c) - 1$. La chaîne de Markov est donc ainsi : pour $j \neq 0, n$, avec proba $1/3$ on passe à $j - 1$, avec proba $1/3$ on reste sur j et avec proba $1/3$ on passe à $j + 1$. Pour $j = 0$ ou n , on reste sur l'état courant avec proba 1. Le but est d'atteindre le sommet 0 ou le sommet n . La chaîne est complètement symétrique entre l'état j et l'état $n - j$.

4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer, en partant d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1} pour $j = 1 \dots (n - 1)$. Déterminer h_0 et h_n .

☞ On a $h_0 = 0$ et $h_n = 0$. De plus, on a :

$$h_j = \frac{1}{3}(1 + h_{j-1} + 1 + h_j + 1 + h_{j+1})$$

autrement dit

$$h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1})$$

5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.

☞ On a $h_0 = h_1 + f(0) = h_1 - h_1 = 0$: ok.

Puis

$$h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_{j-1} + h_{j+1}) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(h_j + f(j-1) + h_{j+1})$$

donc

$$\frac{1}{2}h_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}f(j-1) + \frac{1}{2}h_{j+1}$$

donc $h_j = h_{j+1} + 3 + f(j-1) = h_{j+1} + f(j)$ avec $f(j) = 3 + f(j-1)$ donc $f(j) = 3j - h_1$.

6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$ et conclure. (On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$ que l'on obtient par symétrie, pour finir de résoudre la récurrence).

☞ On a $h_{n-1} = h_n + f(n-1) = 0 + f(n-1)$. Comme $h_1 = h_{n-1}$ et $f(n-1) = 3(n-1) - h_1$, on obtient : $h_1 = 3(n-1) - h_1$ donc $h_1 = 3(n-1)/2$. Donc $h(j) = h_{j+1} + 3j - 3(n-1)/2$.

Donc

$$h_j = h_n + \sum_{k=j}^{n-1} (3k - \frac{3}{2}(n-1)) = 0 + 3 \sum_{k=j}^{n-1} k - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3 \frac{(n-1+j)(n-j)}{2} - \frac{3(n-1)(n-j)}{2} = 3 \frac{(n-j)}{2} (n-1+j - (n-1)) = \frac{3j(n-j)}{2}$$

donc

$$h_{n/2} = \frac{3(n/2)^2}{2} = \mathcal{O}(n^2).$$

Comme $h_{n/2}$ est le "milieu" de la chaîne, c'est le pire cas (on peut vérifier que c'est le maximum de h_j) et donc l'espérance du nombre de recolorations est quadratique.