TD 12 – Chaînes de Markov (distributions invariantes)

Exercice 1. *Proposition utiles*

Le but de cet exercice est de démontrer les propriétés observées sur les exemples de chaînes de Markov.

1. Redémontrez la propriété suivante vue en cours : si un état i est périodique de période d et qu'il communique avec j, alors j est aussi de période d. Autrement dit, la périodicité est une propriété de classe. Que dire de la périodicité d'un état qui possède une boucle sur lui-même ?

2. Redémontrez la propriété vue en cours : la récurrence est une propriété de classe : si i et j communiquent et que i est récurrent, alors j est aussi récurrent. Par conséquent, la transience est également une propriété de classe.

3. On regroupe les états d'une chaîne de markov en classes d'équivalence pour la relation d'accessibilité : deux états i et j sont dans la même classe si et seulement si i est accessible depuis j et j est accessible depuis i. Une classe $\mathcal{C}$ d'états est dite *close* ou *fermée* si pour tout $i \in \mathcal{C}$ et pour tout $j \notin \mathcal{C}$, $p_{i,j} = 0$ (où $(p_{i,j})_{i,j}$ est la matrice de transition). Autrement dit, il n'y a aucune arête sortant de cette classe. Démontrez que :
   - Une classe non close est transitoire.
   - Une classe close **finie** est récurrente.

   En particulier, pour les chaînes de Markov à espace d'états fini, les classes récurrentes sont les classes closes, et les classes transitoires sont les classes non closes.

4. Démontrez que si π est une loi de probabilité stationnaire et si i est un état transitoire, alors $\pi(i) = 0$.

   [Indice : on pourra montrer d'abord les points suivants
   - *x est transitoire ssi $\mathbf{E}[N_x | X_0 = y] < \infty$ pour tout état y*
   - *Si x est transitoire, alors $(Q^n)_{y,x} \to 0$ quand n tend vers l'infini, pour tout état y (où Q est la matrice de transition de la chaîne)]*

Exercice 2. *Classification des états*

On dispose de trois chaînes de Markov définies par les matrices de transition suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

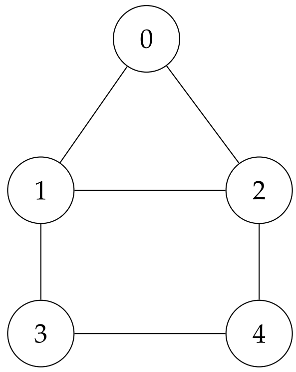
Pour chacune d'entre elles :
- Donner sa représentation graphique.
- Partitionner les états en composantes irréductibles.
- Pour chaque état, dire s'il est transitoire ou récurrent.
- Pour chaque état, dire s'il est périodique ou apériodique.
- Donner la distribution stationnaire.
- Pour chaque état, donner le temps de retour moyen.

Exercice 3. *Marche aléatoire dans un graphe*

On considère une marche aléatoire sur le graphe suivant (c'est à dire qu'à chaque étape, on choisi le sommet suivant uniformément au hasard parmi les voisin du sommet courant).

1. On suppose que la distribution initiale est $\pi_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ (i.e. $X_0 = 0$ avec probabilité 1). Le vecteur de distribution π_n converge-t-il lorsque n tend vers l'infini ? Si oui, déterminer sa limite.

2. Même question si la distribution initiale est $\pi_0 = (0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.



Exercice 4. *Diffusion*

We study a simple model for the exchange of gas molecules between two containers. The total number of molecules in the two containers is N, and we study the evolution of the number of molecules in the first container. At every discrete time step t, the exchange is modeled as follows : if the first container has x molecules, then it increases to $x+1$ with probability $\frac{N-x}{N}$ and decreases to $x-1$ with probability $\frac{x}{N}$.

1. Describe this model with a Markov chain (give the state space and transition matrix). For $N = 3$, draw a graphical representation of this Markov chain.
2. Find the stationary distribution of this Markov chain.
3. Suppose at time 0, the first container is empty (i.e., all the N molecules are in the second container). Let $T \geq 1$ be the next time where the first container is empty. Compute $\mathbf{E}[T]$.

Exercice 5. *Triangles monochromatiques*

Une k-coloration d'un graphe est un assignement pour chaque sommet d'une couleur parmi k couleurs au total. Elle est *propre* si deux sommets adjacents ne reçoivent jamais la même couleur. Un graphe est k-colorable s'il existe une k-coloration propre. Soit G un graphe 3-colorable.

1. Prouver qu'il existe une 2-coloration (non propre) telle qu'aucun triangle n'est monochromatique (un triangle est monochromatique si les trois sommets qui le composent reçoivent la meme couleur).

On considère maintenant l'algorithme suivant dont le but est de trouver une telle 2-coloration : on commence avec une 2-coloration arbitraire. Tant qu'il y a un triangle monochromatique, on choisit uniformément un sommet parmi les trois sommets qui le composent, et on change sa couleur. On veut étudier l'espérance du nombre de recolorations avant de s'arrêter.

Comme G est 3-colorable, il existe une coloration propre Rouge, Bleu, Vert (mais que l'on ne connaît pas). On note R (resp. B, V) l'ensemble des sommets colorés rouge (resp. bleu, vert) dans cette 3-coloration. Considérons maintenant une 2-coloration arbitraire c de G (en rouge et bleu, disons). Soit $m(c)$ le nombre de sommets de R qui ne sont pas colorés rouge dans c, plus le nombre de sommets de B qui ne sont pas colorés bleu dans c.

2. Que dire si $m(c) = n$ ou $m(c) = 0$?
3. En s'inspirant de l'exemple du cours sur 2-SAT, modéliser l'évolution de $m(c)$ par une chaîne de Markov sur $\{0, \ldots, n\}$. Quels sont le ou les sommets à atteindre pour terminer ? Que pouvez-vous dire de l'état j par rapport à l'état $n-j$ pour $j \in \{0, \ldots, n\}$?
4. Soit h_j l'espérance du nombre de recolorations à effectuer pour terminer, en partant d'une 2-coloration c pour laquelle $m(c) = j$. Exprimer h_j en fonction de h_{j-1} et h_{j+1} pour $j = 1 \ldots (n-1)$. Determiner h_0 et h_n.
5. Montrer que $h_j = h_{j+1} + f(j)$ pour une certaine fonction f à déterminer, avec $f(0) = -h_1$.
6. Prouver que $h_{n/2} = \mathcal{O}(n^2)$ et conclure. *(On pourra utiliser la relation $h_1 = h_{n-1}$ que l'on obtient par symétrie, pour finir de résoudre la récurrence).*