TD 10 – Chaînes de Markov

Exercice 1. *Las Vegas*

Let $\mathcal{A}$ be a Las-Vegas randomized algorithm for a decision problem with an expected running time $T(n)$. Devise a Monte-Carlo randomized algorithm with (deterministic) running time $10T(n)$ and produces an error with probability at most $\frac{1}{10}$.

Exercice 2. *Monte-Carlo*

Suppose you are given a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{A}$ for deciding whether $x \in \{0,1\}^*$ is in the language L or not. Suppose it has the following property. If $x \in L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 0\} \leq 1/4$ and if $x \notin L$, then $\mathbf{P}\{\mathcal{A}(x) = 1\} \leq 1/3$. Note that the probability here is taken over the randomness used by the algorithm $\mathcal{A}$ and *not* over the input x.

1. Construct a randomized polynomial-time algorithm $\mathcal{B}$ that is allowed to make independent calls to $\mathcal{A}$ such that for all inputs $x \in \{0,1\}^*$, we have $\mathbf{P}\{\mathcal{B}(x) = \mathbf{1}_{x\in L}\} \geq 1 - 2^{-|x|}$. Here $\mathbf{1}_{x\in L} = 1$ if $x \in L$ and 0 otherwise, and $|x|$ denotes the length of the bitstring x.

Exercice 3. *Meteo*

Dans un certain pays, il ne fait jamais beau deux jours de suite. Si un jour il fait beau, alors le lendemain il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain, et s'il y a changement, il y a une chance sur deux que ce soit pour du beau temps.

1. Former, à partir de cela, une chaîne de Markov que l'on représentera à la fois sur sa forme graphique et sous la forme matrice de transition.
2. Si un jour il fait beau, quel est le temps le plus probable pour le surlendemain ?
3. Peut-on supposer maintenant que l'on a deux deux états, un pour "Beau temps" et un pour "Mauvais Temps" ? Déterminer la nouvelle matrice de transition.

Exercice 4. *Tennis*

1. On considère un jeu classique du tennis (pas un jeu décisif) de Daniel contre Olivier. Olivier gagne chaque point avec probabilité p. Modéliser par une chaîne de Markov et donner la probabilité pour Olivier de gagner le jeu.
2. Lorsque $p \approx 0$, donner l'équivalent asymptotique de cette probabilité. Commenter.

Exercice 5. *Marche aléatoire sur Z biaisée*

Soit $p \in]0,1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbb{Z}$ et de matrice de transition

$$P(i,j) = \begin{cases} p \text{ si } j = i+1 \\ 1-p \text{ si } j = i-1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Cette chaîne est-elle irréductible ?
2. Dans cette question on suppose $p \neq 1/2$, montrer que tous les états de cette chaîne sont transients. *Indication : on pourra utiliser le lemme de Borel-Cantelli. On rappelle également l'équivalent de Stirling :* $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.

Exercice 6. *Marche aléatoire sur Z non biaisée*

Soit $\{X_k\}$ des variables aléatoires discrétes indépendantes et identiquement distribuées. Chaque X_k prend la valeur 1 avec probabilité $1/2$ et -1 avec probabilité $1/2$. On définit alors une marche aléatoire dans R par $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On s'intéresse à la probabilité d'un retour à l'origine (en un temps fini).

1. S'il y a eu un retour à l'origine au temps m, que peut-on dire de m ? Montrer qu'un retour à l'origine au temps $2n$ arrive avec une probabilité $u_{2n} = \binom{2n}{n} 2^{-2n}$.

2. On définit de même la probabilité f_{2n} qu'un premier retour à l'origine se fasse au temps $2n$. Montrer que pour $n > 0$ les probabilités $\{f_{2k}\}$ et $\{u_{2k}\}$ vérifient la relation $u_{2n} = f_0 u_{2n} + f_2 u_{2n-2} + \cdots + f_{2n} u_0$ (on pose $u_0 = 1$ et $f_0 = 0$).

3. On définit les fonctions génératrices :

$$U(x) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{2m} x^m \text{ et } F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{2m} x^m$$

Déduire de la question précédente une relation simple entre $U(x)$ et $F(x)$.

4. Montrer que $U(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. En déduire que $F(x) = 1 - \sqrt{1-x}$.
Indication : on rappelle que $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$.

5. Montrer que $f_{2m} = \frac{\binom{2m}{m}}{(2m-1)2^{2m}}$.
Indication : considérer F'.

6. Définissons w_n la probabilité qu'un retour à l'origine se fasse au plus tard au temps n. Notre but est de savoir si l'on va revenir en un temps fini, c'est-à-dire déterminer $w_* = \lim_{n\to\infty} w_n$. Montrer que $w_* = F(1)$. Conclure.